Kombinatoryczna teoria liczb

Semestr zimowy 2013/2014

Seria XI

Zadanie 9.1. Niech $A \subseteq [N], |A| = \delta N$ oraz $N > N_\delta$. Pokaż, że istnieje zbiór $A' \subseteq A$ taki, że $|A'| \geqslant (\delta - o(1))N$ oraz $A' + A' \subseteq A\tilde{+}A$.

Zadanie 9.2.* Pokaż, że jeżeli $A \subseteq \mathbb{Z}$, to $|A\tilde{+}A| = (1 + o(1))|A + A|$.

Zadanie 9.3.* Niech $[n] = A_1 \cup \cdots \cup A_r$ będzie dowolnym podziałem (r jest stałą, a n jest "duże"). Oszacuj z dołu ilość liczb naturalnych dających się przedstawić w postaci sumy dwóch różnych liczb monochromatycznych.

Zadanie 9.4. Niech $T(X)$ oznacza liczbę ciągów arytmetycznych długości 3 w zbiorze $X \subseteq \mathbb{Z}_N$. Pokaż, że jeżeli $\max_r |\widehat{A}(r) - \widehat{B}(r)| \leqslant \varepsilon|A|$, to $|T(A) - T(B)| \ll \varepsilon|A|^2$.

Zadanie 9.5. Udowodnij, że zbiór Bohra $B(\Gamma, \varepsilon) \subseteq Z_N$ zawiera ciąg arytmetyczny długości $\gg \varepsilon N^{1/|\Gamma|}$.

Zadanie 9.6. Pokaż, że $|B(\Gamma, \varepsilon)| \geqslant (\varepsilon/2)^{|\Gamma|}N$.

Zadanie 9.7. Pokaż, że jeżeli $I = [L]$, to $\|\widehat{I}\|_1 = \sum_r |\widehat{I}(r)| \ll p \log L$.

Zadanie 9.8. Pokaż, że dla każdego zbioru $A \subseteq \mathbb{Z}_n$ zachodzi nierówność $\|\widehat{A}\|_1 \leqslant |A|^{1/2}$.

Zadanie 9.9. Zbiory $A, B, S \subseteq \mathbb{Z}_N$ spełniają następujące warunki: $S \subseteq A$, $S \cap B = \emptyset$. Pokaż, że

$$\|\widehat{S}\|_1 \cdot \max_r |\widehat{A}(r) - \widehat{B}(r)| \geqslant |S|.$$

Zadanie 9.10.* Niech $A, B \subseteq \mathbb{F}_p$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Pokaż, że

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_p^*} \mathsf{E}(A, x \cdot B) \leqslant |A|^2|B|^2 + |A||B|p.$$

Zadanie 9.11. Oszacuj największą moc zbioru $A \subseteq [N]$, którego zbiór różnic $A - A$ nie zawiera liczb pierwszych.