

PROBLEMY OTWARTE

1. (Solymosi) Niech $A \subseteq \mathbb{R}$ będzie DCD-zbiorem. Udowodnij, że istnieje stała $c > 0$ taka, że

$$|A + A| \gg |A|^{3/2+c}.$$

2. (Bukh) Pokaż, że istnieje stała $\varepsilon > 0$ taka, że jeżeli $|A + A| = K|A|$, to

$$|A + 2 \cdot A| \ll K^{3-\varepsilon}|A|.$$

3. (Ruzsa) Czy istnieją zbiory $A \subseteq [N]$ mocy $N^{1/2+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, nie zawierające nietrywialnych (tzn. różnych od $x = y = u = v$) rozwiązań równania

$$x + 3y = 2u + 2v.$$

4. (Lev) Niech A będzie skończonym podzbiorem grupy abelowej takim, że dla każdego $d \in A - A$ mamy $(A \circ A)(d) \geq |A|/3$. Pokaż, że $A - A$ jest podgrupą albo sumą mnogościową trzech warstw tej samej grupy. (Czy jest to prawdą, jeśli założymy nawet $(A \circ A)(d) \geq |A|/2$?)

5. (Balog) Niech $A \subseteq \mathbb{F}_p$, $|A| > p^{1/2}$, gdzie p jest liczbą pierwszą. Udowodnij, że

$$|(A - A)(A - A)| \geq p^{1-\varepsilon}$$

dla $p > p_\varepsilon$.